შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/ M423

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

შევნიშნოთ $P(1)=Q(1)$

$P(16)=a_n\cdot 16^n+\dots+a_1\cdot 16+a_0$

$P(16)-P(1) \vdots 3$ $\left(P(16)=3^{2017};\ \dfrac{P(a)-P(b)}{} \vdots (a-b) \right) \Rightarrow P(1)=Q(1) \vdots 3$

$Q(P(16))=b_n\cdot P(16)^n+\dots+b_1\cdot P(16)+b_0$

$b_n\cdot(a_n\cdot 16^n+\dots+a_1\cdot 16+a_0)^n+\dots+b_1(a_n\cdot 16^n+\dots+a_1\cdot 16+a_0)+b_n$

$Q(P(16))-Q(1) \vdots (P(16)-1)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

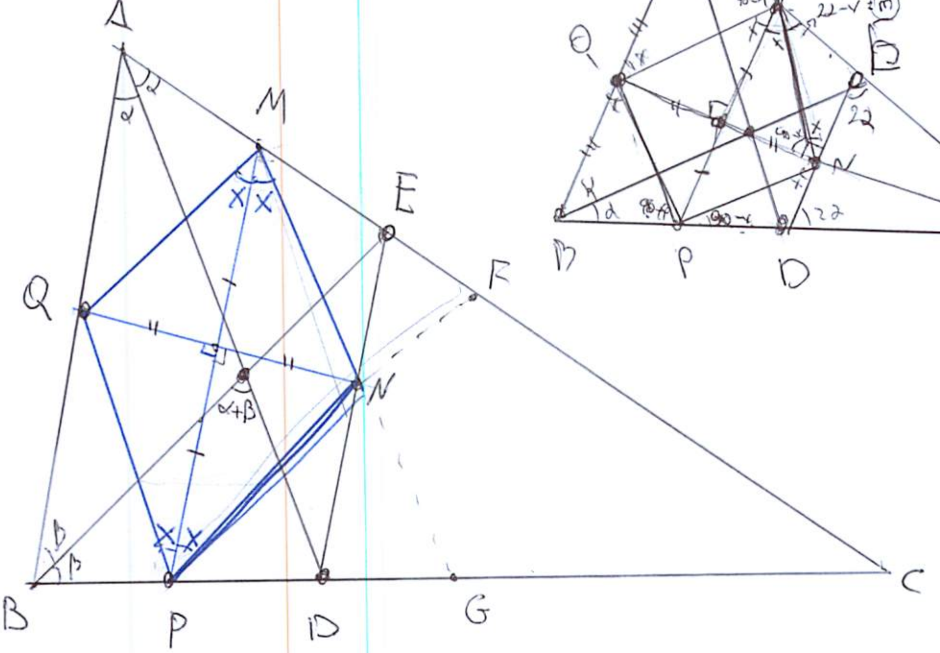
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

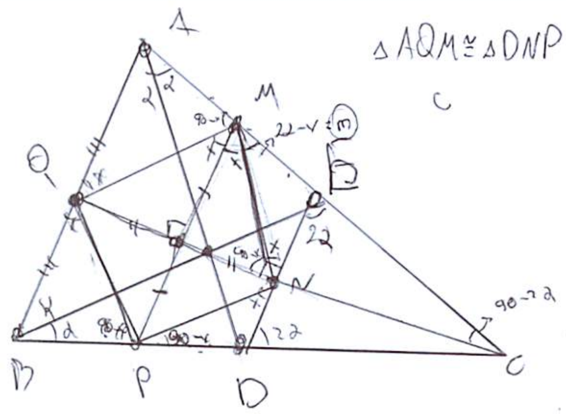
მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/ M423

ამოცანა № 5

გვერდი № 1





თუ დავამტკიცებთ, რომ $2x \le \frac{\alpha+\beta}{2}$, მაშინ ვღებულობთ, რომ $x \le \frac{\alpha}{2}$ ან $x \le \frac{\beta}{2}$.

ტოლობა მიიღწევა მაშინ, როდესაც AB არის ABC ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/ 14423

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=(n^2+1)^2-n^2=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$

$(n+1)^4+(n+1)^2+1=(n+1)^4+2\cdot(n+1)^2+1-(n+1)^2=((n+1)^2+1)^2-(n+1)^2=(n^2+3n+3)(n^2+n+1)$

გვინდა, რომ n^4+n^2+1-სა და $(n+1)^4+(n+1)^2+1$-ს ~~ერთნაირი~~ იყოს ~~ტოლი; ანუ:~~ ესე უდიდესი მარტივი გამყოფები იყოს ტოლი

* * *

$\boxed{a_k=k^2+k+1;}$ $\boxed{P_k - a_k\text{-ს უდ. მარტ. გამყ.}}$

თუ შევამოწმებთ, მივხვდებით $a_k\cdot a_{k-1}=a_{k^2}$

$[(k^2+k+1)((k-1)^2+(k-1)+1)=(k^2+k+1)(k^2-k+1)=k^4+k^2+1]$

~~ასევე~~ ესე $(n^2-n+1;n^2+n+1)=(2n;n^2-n+1)=(n;n^2-n+1)=(n,-n+1)=$

$=(n,n-1)=1$ ესე $(a_n;a_{n-1})=1$ მივიღეთ ევკლიდეს ~~ესე $(a_n;a_{n+2})$~~ ალგორითმით. $\Rightarrow (P_n;P_{n-1})=1$

ჩამოვწეროთ ყველა a_i $(i=1;2;\dots)$

$a_1;\ a_2;\ a_3,\dots,a_{k-2},\ a_{k-1}\ a_k\ a_{k+1}\ a_{k+2}\ \dots\ a_{k^2}\dots$

$P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ \ P_{k-2}\ \ P_{k-1}\ \ P_k\ \ P_{k+1}\ \ P_{k+2}\ \ \ P_{k^2}$

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ არ არსებობს ისეთი P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, რომ $P_i<P_{i+1}>P_{i+2}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/M 423

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

~~ანუ~~ მოიძებნება ისეთი P_k და P_{k+1}, (უდიდ.-უდიდესის მარტივი გამყოფი) რომ $P_{k+1} \not< P_k$, თუ არა განვიხილოთ შემთხვევა:

1) $\boxed{P_{k-1} \,?\, P_k \leq P_{k+1}}$

$P_{k-1} \,?\, P_k < P_{k+1} < \dots < P_{k^2} < \dots$ (~~ან. მაგალითად~~)

თუ P_k-ს შემდეგ, სადმე "<"-ს ნაცვლად თუ იქნება ">", მაშინ გამოვა რომ არსებობს ისეთი სამეული ~~ანუ~~ რომ $P_j < P_{j+1} > P_{j+2}$, რაც ჩვენ დაშვებას ეწინააღმდეგება. ანუ ყველგან იქნება "<". (P_k-ს შემდეგ)

P_{k^2} არის a_{k^2}-ის უდ. მარ. გამ. $a_{k^2} = a_{k-1} \cdot a_k$

$P_{k^2} = \max(P_k; P_{k-1})$ რადგან $P_{k^2} > P_{k+1} > P_k \,?\, P_{k-1}$

~~P_{k^2}~~

$P_{k^2} \neq P_k \Rightarrow P_{k-1} = P_{k^2} > P_k$

$P_k < P_{k-1} < \dots < P_2 < P_1$. რაც არის შეუძლებელი, ~~ანუ~~ $P_1 = 3$; $P_2 = 7$ $3 < 7$. (ყველგან ეწერება "<" იგივე მსჯელობით)

2) ~~$P_{k-1} \,?\, P_k > P_{k+1}$~~

~~ანუ ჩვენ ვიცით, რომ არსებობს სამეული $P_{k-1} < P_k <$~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/ M423

ამოცანა № 6

გვერდი № 3

2. ანუ არსებობს, რომ P_{k-1} ? $P_k > P_{k+1}$.
დავუშვებთ თანახმად $P_{k-1} > P_k$, (წინააღმდეგ შემთხვევაში $P_{k-1} < P_k > P_{k+1}$ და მოიძებნა სასურველი) ანუ.

$P_1 > P_2 > \dots > P_{k-1} > P_k > P_{k+1} > \dots$

(P_k-მდე ყველგან უნდა ეწეროს ">" ნიშანი მკაცრად) რაც დაუშვებელია, რადგან $P_1 = 3$; $P_2 = 7$; $3 < 7$.

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ არსებობს K, რომ უმგ(a_{k-1}) < უმგ(a_k) > უმგ(a_{k+1}) ✓.

დავამტკიცოთ, რომ არსებობს უსასრულოდ ბევრი a_k რომ უმგ(a_{k-1}) < უმგ(a_k) > უმგ(a_{k+1}).
დავუშვათ, რომ გვაქვს სასრული რაოდენობა ისეთი a_k-ების, რომ აკმაყოფილებს პირობას.
განვიხილოთ $\max(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_5}) = a_m$.
ვიცით, რომ $P_{m-1} < P_m > P_{m+1}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/ M423

ამოცანა № 6

გვერდი № 4

1. თუ P_m-ს შემდეგომ პირველი ნიშანი არ შეგვხვდა "<".

ანუ $P_{m-1} < P_m > P_{m+1} > \dots > \dots$

m - სასრული რიცხვია; $P_{?} > 0$.

P_m-ს შემდეგ იქნება უსასრულოდ ბევრი რიცხვი, მარტივად მივხვდებით, რომ $P_{2m+1} < 0$, რაც არ შეიძლება.

2. თუ P_m-ს შემდეგომ ერთხელ მაინც შეგვხვდა ნიშანი "<", განვიხილოთ პირველი:

$P_{m-1} < P_m > P_{m+1} > \dots > P_{t-1} > P_t < P_{t+1} < \dots \quad (t>m)$

ცხადია, რომ P_t-ს შემდგომ ყველგან იქნება "<" ნიშანი, (წინააღმდეგ შემთხვევაში მოიძებნება $P_j < P_{j+1} > P_{j+2}$, სადაც $t<j$).

განვიხილოთ $P_{(t+1)^2} = \max(P_t; P_{t+1})$ $\quad P_{t+1} > P_t$

ვიცით, რომ $P_t < P_{t+1} < \dots < \max(P_t, P_{t+1}) \Rightarrow P_{t+1} > P_{t+1}$

რაც არ შეიძლება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 6

04.05.2014/ მათ/IV/ M423

ამოცანა № 6

გვერდი № 5

ანუ არსებობს უსასრულოდ ბევრი სამეული, რომ

$p_{k-1} < p_k > p_{k+1}$, ანუ ~~$p_{k\pm p}$~~

$n^4+n^2+1 = a_{n^2} = a_n \cdot a_{n-1}$

$(n+1)^4+(n+1)^2+1 = a_{(n+1)^2} = a_n \cdot a_{n+1}$

ყოველი ასეთი სამეულისთვის ~~a_{k-1}~~ (p_{k-1}, p_k, p_{k+1})

p_{k-1}-ის შესაბამისი a_{k-1} იქნება a_{n-1}

p_k-ს 〃 a_k 〃 a_n

p_{k+1}-ს შესაბამისი a_{k+1} 〃 a_{n+1}

~~a_n~~ უმგ(a_{n^2}) = უმგ$(a_{(n+1)^2})$ = უმგ$(a_n) = p_n$.

უსგ$(2^\alpha \cdot k, t)$ = უსგ(k, t) (სადაც k და t კენტი რიცხვებია)

~~რადგან~~ იმიტომ, რომ $(2^\alpha, t) = 1$. (n^2-n+1 – ყოველთვის კენტია:
კ − კ + 1 = კ
ლ − ლ + 1 = კ

შესაძლებელია, რომ a_k, a_{k+2}-ს უსგ იყოს უმგ, მაგრამ არ შეიძლება, რადგან

$(k^2+k+1;\ k^2+5k+\cancel{7}) = (4k+6;\ k^2+5k+7) = (2k+3;\ k^2+5k+7) = (2k+3;\ 2k^2+10k+14) = \cancel{(2k+3;\ 6k+14)} = 1$